

Conservazione della quantità di moto

Il rinculo di un cannone

Problema

Un canone di massa M è posizionato su una piattaforma orizzontale ed è pronto per lanciare un proiettile di massa 25Kg sullo stesso piano della piattaforma. Nello sparo il proiettile esce dalla bocca di fuoco del cannone con velocità di 150m/s .

Quesiti

1. Precisare quale deve essere l'angolo di inclinazione per la velocità di lancio in modo che il proiettile sparato abbia gittata massima.
2. Giustificare la risposta fornita nel precedente quesito.
3. Viene effettuato lo sparo del proiettile con la canna del cannone che forma un angolo di 45° con il piano orizzontale. Sapendo che la componente sul piano orizzontale della velocità di rinculo del cannone è di $4,0\text{m/s}$, determinare la massa del cannone.
4. Determinare la gittata del proiettile. Rappresentare la traiettoria descritta dal proiettile.

Elaborazioni

1. Ricordato che per gittata del proiettile si intende la distanza tra la verticale del punto di atterraggio del proiettile e la verticale del punto da cui è stato lanciato, dalla teoria è noto che il proiettile raggiunge la gittata massima quando viene sparato con angolo di inclinazione rispetto all'orizzontale $\alpha=45^\circ$.
2. Per risolvere il quesito, considerato che il moto del proiettile sarà nel piano determinato dalla verticale del punto di lancio e dalla direzione del vettore velocità iniziale $\vec{V}_0$, adottiamo come sistema di riferimento cartesiano ortogonale per la descrizione quello avente come asse delle ordinate (asse y) la verticale per il punto O di lancio orientata verso l'alto e come asse delle ascisse (asse x) la retta sul piano orizzontale passante per O e appartenente allo stesso piano del vettore della velocità di lancio.
 - a. Nel sistema di riferimento suddetto, indicato in Figura 1, sia α l'angolo di lancio; le leggi orarie delle coordinate $x(t)$, $y(t)$ del proiettile P assunto come puntiforme sono le seguenti:

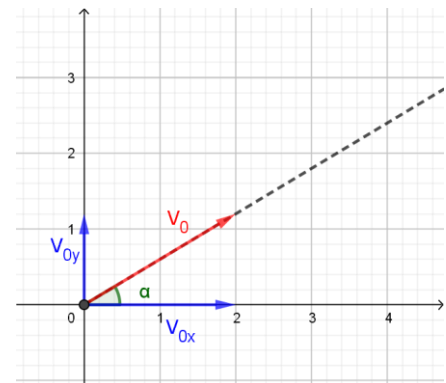


Figura 1

$$x = V_{0x}t = V_0 \cos \alpha \cdot t \quad (\text{per la proiezione sull'asse } x), \quad (\text{a.1})$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{0y}t = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin \alpha \cdot t \quad (\text{per la proiezione sull'asse } y), \quad (\text{a.2})$$

avendo assunto $t=0\text{s}$ l'istante di lancio; $g=9,81\text{m/s}^2$ è il modulo del vettore accelerazione di gravità.

- b. Determiniamo l'istante t in cui il proiettile atterra annullando l'ordinata. Risulta:

$$-\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin \alpha \cdot t = 0 \quad \text{le soluzioni sono } t_1=0\text{s} \text{ (istante di lancio), } t_2 = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g} \text{ (istante di$$

atterraggio). Sostituiamo ora il valore t_2 nell'equazione (a.1) e ricaviamo l'ascissa del punto in cui cade il proiettile; questo valore rappresenta anche la **gittata del lancio**.

$$x_G = V_0 \cos \alpha \cdot \frac{2V_0 \sin \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}$$

Ricordato che $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, il valore massimo per la gittata si ha quando $\sin(2\alpha)=1$, quindi quando $2\alpha=90^\circ$, cioè se $\alpha=45^\circ$.

3. (Applicazione della conservazione della quantità di moto)

Indichiamo con m_p la massa del proiettile lanciato dal cannone; la massa del cannone è indicata con M nel testo del problema. Nel fenomeno dello sparo consideriamo il sistema isolato formato dal cannone e dal proiettile⁽¹⁾.

- a. Durante lo sparo si conserva la quantità di moto del sistema. Prima dello sparo tutto è in quiete sul piano orizzontale, quindi la quantità di moto iniziale è nulla, e tale rimane la quantità di moto del sistema meccanico dopo lo sparo. La velocità di uscita del proiettile dal cannone ha modulo $V_0=150$ m/s e nel sistema di riferimento cartesiano adottato il corrispondente vettore ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \vec{V}_0 &= V_{0x} \vec{i} + V_{0y} \vec{j} = V_0 \cdot \cos(45^\circ) \vec{i} + V_0 \cdot \sin(45^\circ) \vec{j} = 150 \left(\frac{m}{s} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + 150 \left(\frac{m}{s} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} = \\ &= (75\sqrt{2} \vec{i} + 75\sqrt{2} \vec{j}) \left(\frac{m}{s} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

- b. Indichiamo con $\vec{V}_c$ il vettore velocità di rinculo del cannone nello sparo. Per la **conservazione della quantità di moto** del sistema cannone+proiettile nello sparo sussiste la seguente equazione vettoriale

$$M \cdot \vec{V}_c + m_p \cdot \vec{V}_0 = 0, \text{ da cui si ricava}$$

$$\vec{V}_c = -\frac{m_p}{M} \cdot \vec{V}_0 \quad (2)$$

Dalla (2) si deduce che la velocità di rinculo del cannone ha la stessa direzione della velocità iniziale del proiettile, ma verso opposto.

Esplicitiamo la (2) tramite le componenti cartesiane vettoriali. Con ovvio significato dei simboli si ha

$$V_{cx} \vec{i} + V_{cy} \vec{j} = -\frac{m_p}{M} \cdot (V_{0x} \vec{i} + V_{0y} \vec{j}) = -\frac{m_p \cdot V_{0x}}{M} \vec{i} - \frac{m_p \cdot V_{0y}}{M} \vec{j} \quad (2.1)$$

Ebbene, due vettori sono uguali se e solo se in un qualsiasi sistema di riferimento cartesiano hanno le rispettive componenti uguali, perciò deve risultare in particolare

$$V_{cx} \vec{i} = -\frac{m_p \cdot V_{0x}}{M} \vec{i}, \text{ da cui } V_{cx} = -\frac{m_p \cdot V_{0x}}{M} \quad (3)$$

- c. Nel testo del problema si legge che la componente orizzontale della velocità di rinculo del cannone ha valore 4,0m/s, e poiché nel sistema di riferimento adottato la componente vettoriale orizzontale $V_{cx} \vec{i}$ è diretta nel verso delle ascisse negative, sarà

$$V_{cx} = -4,0 \text{ m/s}. \quad (4)$$

⁽¹⁾ In verità dovremmo considerare anche la massa dell'esplosivo utilizzato nello sparo. Riteniamo trascurabile questa massa rispetto alle due masse indicate (del proiettile e del cannone).

- d. Dalle relazioni (3) e (4), e tenendo conto che dalla (1) risulta $V_{0x} = 75\sqrt{2}\left(\frac{m}{s}\right)$, possiamo scrivere

$$M = -\frac{m_p \cdot V_{0x}}{V_{Cx}} = -\frac{25Kg \cdot 75\sqrt{2}ms^{-1}}{-4,0ms^{-1}} \approx 663Kg$$

4. La gittata del proiettile vale

$$x_G = \frac{V_0^2 \cdot \sin(90^\circ)}{g} = \frac{(150ms^{-1})^2 \cdot 1}{9,81ms^{-2}} \approx 2294m$$

La traiettoria descritta dal proiettile è rappresentata in Figura 2.

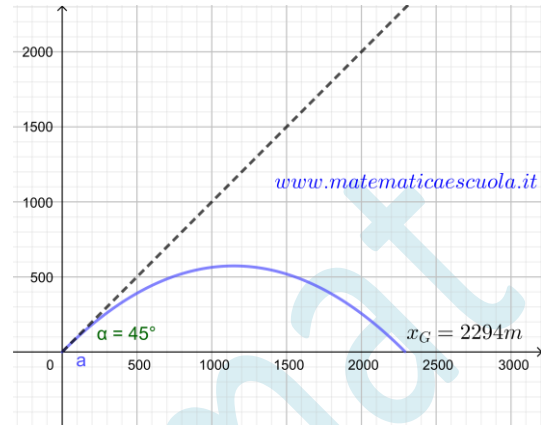


Figura 2-Traiettoria descritta dal proiettile